Решение неоднородной задачи с неоднородными краевыми условиями

Рассмотрим краевую задачу

$$Lz(x) = f(x), \tag{65}$$

$$\begin{cases} R_1 z = d_1; \\ R_2 z = d_2, \end{cases} \tag{66}$$

где $f(x) \in C[a, b]$, граничные операторы R_1, R_2 удовлетворяют условиям (53), (54), а d_1 и d_2 – постоянные.

Утверждение 11. Если $\lambda = 0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то краевая задача (65), (66) имеет единственное решение

$$z(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy + C_1 \upsilon_1(x) + C_2 \upsilon_2(x),$$

где C_1, C_2 – решение системы.

$$\begin{cases} C_1 R_1 \upsilon_1 + C_2 R_1 \upsilon_2 = d_1; \\ C_1 R_2 \upsilon_1 + C_2 R_2 \upsilon_2 = d_2, \end{cases} \tag{67}$$

где υ_1, υ_2 – любые линейно независимые решения уравнения $L\upsilon = 0$; $G(x, y)$ – функция Грина задачи (58), (59).

Замечание 22. Система (67) всегда имеет и притом единственное решение.

Замечание 23. Решение краевой задачи (65), (66) можно представить в виде $z(x) = u(x) + \upsilon(x)$, где $u(x)$ есть решение краевой задачи

$$Lu = f,$$
$$R_1 u = R_2 u = 0,$$

а $\upsilon(x)$ – решение краевой задачи

$$L\upsilon = 0,$$
$$R_1 \upsilon = d_1,$$
$$R_2 \upsilon = d_2.$$

Решение неоднородной краевой задачи с параметром в случае нулевых граничных условий

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu = \lambda r(x)u(x) + g(x), \quad x \in (a, b), \tag{68}$$

$$R_1 u = R_2 u = 0, \tag{69}$$

здесь операторы L, R_1 и R_2 удовлетворяют условиям (52), (53), (54) $p(x) \in C^1[a, b]$; $g(x) \in C[a, b]$; $r(x) \in C[a, b]$ и $r(x) > 0$ на $[a, b]$, λ – комплексный параметр.

Из теоремы Гильберта следует, что краевая задача (68), (69) эквивалентна интегральному уравнению

$$\omega(x) = \lambda \int_a^b \mathrm{K}(x, y)\,\omega(y)\,dy + F(x) \tag{70}$$

относительно функции $\omega(x) = \sqrt{r(x)}\,u(x)$ с непрерывным самосопряженным ядром $\mathrm{K}(x, y) = \sqrt{r(x)r(y)}\,G(x, y)$, где $G(x, y)$ – функция Грина задачи (56), (57), а $F(x) = \sqrt{r(x)} \int_a^b G(x, y)\,g(y)\,dy$.

Из (70) получаем утверждение.

<u>Утверждение 12.</u> Если $\lambda = 0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то:

1) при $\lambda \neq \lambda_{\mathrm{K}}$, $\mathrm{K} = 1, 2, \dots$, где λ_{K} – собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), существует единственное решение краевой задачи (68), (69), которое может быть найдено по 1-й формуле Шмидта для интегрального уравнения (70) (см. формулу (47));

2) при $\lambda = \lambda_{\mathrm{K}}$ (λ_{K} – собственное значение кратности 1 с собственной функцией $u_{\mathrm{K}}(x)$, либо кратности 2, т.е. $\lambda_{\mathrm{K}} = \lambda_{\mathrm{K}+1}$ с собственными функциями, отвечающими им $u_{\mathrm{K}}(x)$, $u_{\mathrm{K}+1}(x)$) для разрешимости задачи (68), (69) необходимо и достаточно, чтобы функция $g(x)$ была ортогональна всем собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), отвечающим собственному значению λ_{K}, т.е. чтобы $(g, u_i) = 0$, где $i = \mathrm{K}$, или $i = \mathrm{K}$, $\mathrm{K} + 1$. При этом решение краевой задачи (68), (69) может быть найдено по 2-й формуле Шмидта для интегрального уравнения (70) (см. формулу (48)).

Замечание 24. Решение краевой задачи

$$Lz = \lambda r(x)z(x) + g(x);$$
$$R_1 z = d_1;$$
$$R_2 z = d_2$$

можно представить в виде $z(x) = u(x) + \upsilon(x)$, где $u(x)$ есть решение краевой задачи (68), (69), а $\upsilon(x)$ – решение краевой задачи

$$L\upsilon = 0; \tag{71}$$

$$R_1\upsilon = d_1, \quad R_2\upsilon = d_2. \tag{72}$$

Если $\lambda = 0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то решение $\upsilon(x)$ задачи (71), (72) существует и единственно и имеет вид $\upsilon(x) = C_1\upsilon_1(x) + C_2\upsilon_2(x)$, где C_1 и C_2 – решение системы (67), а $\upsilon_1(x)$, $\upsilon_2(x)$ – любые линейно независимые решения уравнения $L\upsilon = 0$. Условия существования решения $u(x)$ задачи (68), (69) дает утверждение 12.

Условия неотрицательности и положительности спектра задачи Штурма–Лиувилля

Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля

$$Lu = \lambda r(x)u(x), \quad x \in [a, b]; \tag{73}$$

$$\begin{cases} h_1 u(a) - h_2 u'(a) = 0; \\ H_1 u(b) + H_2 u'(b) = 0, \end{cases} \tag{74}$$

где $r(x) \in C[a, b]$; $r(x) > 0$ на $[a, b]$, $h_i \geq 0$, $H_i \geq 0$, $i = 1, 2$ и $h_1 + h_2 > 0$, $H_1 + H_2 > 0$, оператор L определяется равенством (52) и коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ в (52) удовлетворяют условиям: $p(x) \in C^1[a, b]$, $q(x) \in C[a, b]$.

Если λ_{K}, $\mathrm{K} = 1, 2, \ldots,$ – собственные значения задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то справедливы следующие теоремы.

Теорема 22. Пусть в задаче Штурма–Лиувилля (56), (57) $q(x) \geq 0$, $p(x) > 0$ на $[a, b]$, тогда $\lambda_{\mathrm{K}} \geq 0$ для любого $\mathrm{K} = 1, 2, \ldots$.

Теорема 23. Если в задаче Штурма–Лиувилля (56), (57) $p(x)>0$, $q(x)\ge 0$ на $[a, b]$. Тогда для того, чтобы $\lambda=0$ было собственным значением задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), необходимо и достаточно, чтобы $h_1=H_1=0$, $q(x)=0$ на $[a, b]$, при этом собственному значению $\lambda=0$ соответствует собственная функция $u_0\equiv\text{const}\ne 0$.

Пример 2.1. Найти решение краевой задачи

$$x^2y''+xy'-y=0,$$

$$y(1)=1,\ \ y(x) \text{ ограничено при } x\to 0.$$

Решение. Нетрудно заметить, что заданное уравнение есть уравнение Эйлера [5]. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y_{\text{общ.}}=C_1x+\frac{C_2}{x}.$$

Из краевых условий находим $C_2=0$, $C_1=1$. Следовательно, решение краевой задачи имеет вид $y(x)=x$.

Пример 2.2. При каких a краевая задача

$$y''+ay=1;$$

$$y(0)=y(1)=0$$

не имеет решений.

Решение. При $a=0$ краевая задача решений не имеет. При $a>0$, очевидно, общее решение уравнения $y''+ay=1$ имеет вид $y=C_1\cos\sqrt{a}\,x+C_2\sin\sqrt{a}\,x+\dfrac{1}{a}$.

Заданная краевая задача не будет иметь решения тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} C_1=-\dfrac{1}{a}; \\ C_1\cos\sqrt{a}+C_2\sin\sqrt{a}=-\dfrac{1}{a} \end{cases} \tag{75}$$

относительно C_1 и C_2 несовместна (эта система получена из заданных граничных условий). Система (75) несовместна при условии, если $\sin\sqrt{a}=0$, $\cos\sqrt{a}=-1$ (если $\sin\sqrt{a}=0$, то $\cos\sqrt{a}=\pm1$). В случае $\cos\sqrt{a}=1$ уравнения системы пропорциональны и, следовательно, система (75) совместна. Из последних условий находим, что заданная краевая задача не имеет решений при $a=(2n-1)^2\pi^2$. Кроме того, как отмечено выше, при $a=0$ также не существует решения краевой задачи. При $a<0$ решение, очевидно, существует.

Пример 2.3. Построить функцию Грина следующей краевой задачи

$$x^2y''+2xy'-2y=0; \tag{76}$$

$$y(1)=0, \quad y(x) \text{ ограничено при } x\to 0. \tag{77}$$

Решение. Сначала покажем, что для данной краевой задачи функция Грина существует и она единственная. Для этого достаточно показать, что краевая задача (76), (77) имеет только тривиальное решение.

Заданное уравнение есть уравнение Эйлера. Стандартным методом [5] находим фундаментальную систему решений этого уравнения $y_1=x$, $y_2=\dfrac{1}{x^2}$, т.е. общее решение уравнения (76) имеет вид $y(x)=C_1x+\dfrac{C_2}{x^2}$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Из краевых условий (77) находим, что $C_1=C_2=0$. Итак, задача (76), (77) имеет только нулевое решение, а значит, для нее можно построить и притом единственную функцию Грина.

Будем искать функцию Грина $G(x, y)$ в виде

$$G(x, y)=\begin{cases} a_1x+\dfrac{a_2}{x^2}, & 0\le x\le y; \\ b_1x+\dfrac{b_2}{x^2}, & y\le x\le 1. \end{cases} \tag{78}$$

Из непрерывности функции Грина

$$\left(a_1y+\frac{a_2}{y^2}\right)-\left(b_1y+\frac{b_2}{y^2}\right)=0. \tag{79}$$

Из условия скачка первой производной функции Грина имеем

$$\left(a_1-\frac{2a_2}{y^3}\right)-\left(b_1-\frac{2b_2}{y^3}\right)=\frac{1}{y^2}. \tag{80}$$

Введем обозначения

$$C_{\text{К}} = a_{\text{К}} - b_{\text{К}}, \tag{81}$$

где $\text{К} = 1,\ 2,\ \dots$.

Тогда из (79) и (80) для определения $C_{\text{К}}(y)$ получим систему

$$\begin{cases} C_1 y + \dfrac{C_2}{y^2} = 0; \\ C_1 - \dfrac{2C_2}{y^3} = \dfrac{1}{y^2}, \end{cases}$$

решение которой имеет вид $C_1 = \dfrac{1}{3y^2}$, $C_2 = -\dfrac{y}{3}$. Далее функция Грина должна удовлетворять заданным краевым условиям, которые в силу (78), (81) можно переписать в виде

$$\begin{cases} a_1 x + \dfrac{a_2}{x^2} \text{ ограничено при } x \to 0; \\ \left(a_1 - \dfrac{1}{3y^2}\right) + \left(a_2 + \dfrac{y}{3}\right) = 0. \end{cases}$$

Откуда имеем $a_2 = 0$; $a_1 = \dfrac{1 - y^3}{3y^2}$. Из (81) находим $b_1 = -\dfrac{y}{3}$,

$b_2 = \dfrac{y}{3}$. Таким образом, искомая функция Грина имеет вид

$$G(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\left(1 - y^3\right) x}{3y^2}, & 0 \le x \le y; \\ \dfrac{\left(1 - x^3\right) y}{3x^2}, & y \le x \le 1. \end{cases}$$

Пример 2.4. Для краевой задачи

$$y'' - y = f(x), \tag{82}$$

$$\begin{cases} y'(0) = 0; \\ y'(2) + y(2) = 0 \end{cases} \tag{83}$$

построить функцию Грина.

Решение. Рассмотрим однородное уравнение $y'' - y = 0$. Функции $y_1(x) = \operatorname{ch} x$ и $y_2(x) = e^{-x}$ являются решениями этого однородного уравнения и удовлетворяют, соответственно, 1-му и 2-му краевым условиям (83). Следовательно, согласно замечанию 20 можно функцию Грина $G(x, s)$ краевой задачи (82), (83) искать в виде

$$G(x,s)=\begin{cases} a \operatorname{ch} x, & 0 \le x \le s; \\ b\, e^{-x}, & s \le x \le 2. \end{cases} \tag{84}$$

Постоянные a и b будем находить из условий непрерывности функции Грина и из условия скачка производной функции Грина при $x = s$. Из этих условий для нахождения a и b получаем систему

$$\begin{cases} a \operatorname{ch} s - b\, e^{-s} = 0; \\ -b\, e^{-s} - a \operatorname{sh} s = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $a = -e^{-s}$, $u = -\operatorname{ch} s$. Следовательно, согласно (84) искомая функция Грина имеет вид

$$G(x,s)=\begin{cases} -e^{-s} \operatorname{ch} x, & 0 \le x \le s; \\ -e^{-x} \operatorname{ch} s, & s \le x \le 2. \end{cases}$$

Пример 2.5. Построить функцию Грина краевой задачи

$$y'' - y = 0; \tag{85}$$

$$y'(a) = y'(b) = 0. \tag{86}$$

Решение. Функции $y_1 = \operatorname{ch}(x-a)$ и $y_2 = \operatorname{ch}(x-b)$ являются решениями уравнения (85) и удовлетворяют, соответственно, первому и второму из условий (86). Ни одна из этих функций не удовлетворяет сразу двум условиям (86). Поэтому функция Грина существует и единственна и ее можно искать в виде

$$G(x,s)=\begin{cases} A \operatorname{ch}(x-a), & 0 \le x \le s; \\ B \operatorname{ch}(x-b), & s \le x \le b. \end{cases}$$

Для нахождения постоянных A и B из условия непрерывности $G(x, s)$ при $x = s$ и условия скачка производной функции Грина при $x = s$ получаем систему:

$$\begin{cases} A \operatorname{ch}(s-a) - B \operatorname{ch}(s-b) = 0; \\ B \operatorname{sh}(s-b) - A \operatorname{sh}(s-a) = 1. \end{cases}$$

Из этой системы без труда находим

$$A = -\frac{\mathrm{ch}\,(s-b)}{\mathrm{sh}\,(b-a)}; \quad B = -\frac{\mathrm{ch}\,(s-b)}{\mathrm{sh}\,(b-a)}.$$

Следовательно, искомая функция Грина имеет вид

$$G(x, s) = \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{ch}\,(x-a)\,\mathrm{ch}\,(s-b)}{\mathrm{sh}\,(b-a)}, & a \le x \le s; \\ -\dfrac{\mathrm{ch}\,(s-a)\,\mathrm{ch}\,(x-b)}{\mathrm{sh}\,(b-a)}, & s \le x \le b. \end{cases}$$

Пример 2.6. Построить функцию Грина краевой задачи

$$(xy')' - \mathrm{K}^2 x^{-1} y = 0, \quad \mathrm{K} \in N; \tag{87}$$

$$\begin{cases} y(1) + y'(1) = 0; \\ y(x) \ \text{ограничено при } x \to 0. \end{cases} \tag{88}$$

Решение. Уравнение (87) можно переписать в виде

$$x^2 y'' + xy' - \mathrm{K}^2 y = 0.$$

Это уравнение Эйлера. Согласно общей методике [5] нетрудно найти линейно независимые решения $y_1 = x^{\mathrm{K}}$ и $y_2 = x^{-\mathrm{K}}$ уравнения (87). Так как задача (87), (88) имеет только тривиальное решение, то функция Грина задачи (87), (88) существует и она единственная. Будем искать ее в виде

$$G(x, s) = \begin{cases} a_1 x^{\mathrm{K}} + a_2 x^{-\mathrm{K}}, & 0 \le x \le s; \\ b_1 x^{\mathrm{K}} + b_2 x^{-\mathrm{K}}, & s \le x \le 1. \end{cases} \tag{89}$$

Из условия непрерывности, условия скачка производной функции Грина и граничных условий (88) получаем для нахождения коэффициентов a_1, a_2, b_1, b_2 систему:

$$\begin{cases} a_1 s^{\mathrm{K}} + a_2 s^{-\mathrm{K}} - b_1 s^{\mathrm{K}} - b_2 s^{-\mathrm{K}} = 0; \\ b_1 \mathrm{K} s^{\mathrm{K}-1} - b_2 \mathrm{K} s^{-\mathrm{K}-1} - a_1 \mathrm{K} s^{\mathrm{K}-1} + a_2 \mathrm{K} s^{-\mathrm{K}-1} = \dfrac{1}{s}; \\ b_1 + b_2 + b_1 \mathrm{K} - b_2 \mathrm{K} = 0; \\ a_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$a_1 = \frac{1}{2К}\left[\frac{1-К}{1+К}s^{К} - s^{-К}\right], \quad a_2 = 0;$$

$$b_1 = \frac{s^{К}(1-К)}{2К(1+К)}, \quad b_2 = -\frac{s^{К}}{2К}.$$

Подставляя значения этих коэффициентов в (89), получим

$$G(x,s) = \begin{cases} \left(\frac{1-К}{1+К}s^{К} - s^{-К}\right)\frac{x^{К}}{2К}, & 0 \le x \le s; \\ \frac{s^{К}}{2К}\left(\frac{1-К}{1+К}x^{К} - x^{-К}\right), & s \le x \le 1. \end{cases}$$

Пример 2.7. Решить краевую задачу

$$y'' + \pi^2 y = \cos \pi x,$$

$$\begin{cases} y(0) = y(1); \\ y'(0) = y'(1). \end{cases}$$

Решение. Найдем функцию Грина данной задачи. Так как соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то функция Грина заданной задачи существует и единственна. Будем искать ее в виде

$$G(x,s) = \begin{cases} a_1 \sin \pi x + a_2 \cos \pi x, & a \le x \le s; \\ b_1 \sin \pi x + b_2 \cos \pi x, & s \le x \le 1. \end{cases}$$

Из условия непрерывности, условия скачка производной функции Грина и граничных условий заданной задачи получаем для нахождения коэффициентов a_1, a_2, b_1, b_2 систему:

$$\begin{cases} a_1 \sin \pi s + a_2 \cos \pi s - b_1 \sin \pi s - b_2 \cos \pi s = 0; \\ b_1 \pi \cos \pi s - b_2 \pi \sin \pi s - a_1 \pi \cos \pi s + a_2 \pi \sin \pi s = 1; \\ \qquad a_2 = -b_2; \\ \qquad a_1 = -b_1 \end{cases}$$

или
$$\begin{cases} a_1 \sin \pi s + a_2 \cos \pi s = 0; \\ -a_1 \cos \pi s + a_2 \sin \pi s = \dfrac{1}{2\pi}; \\ \qquad b_i = -a_i, \quad i = 1,\ 2. \end{cases}$$

Из этой системы без труда находим

$$a_1 = -\frac{\cos \pi s}{2\pi}, \quad a_2 = \frac{\sin \pi s}{2\pi}, \quad b_1 = \frac{\cos \pi s}{2\pi}, \quad b_2 = -\frac{\sin \pi s}{2\pi}.$$

Следовательно, функция Грина $G(x, s)$ имеет вид

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi(s - x)}{2\pi}, & 0 \le x \le s; \\ \dfrac{\sin \pi(x - s)}{2\pi}, & s \le x \le 1 \end{cases}$$

или
$$G(x, s) = \frac{\sin \pi |x - s|}{2\pi}, \quad x \in [0, 1].$$

Решение заданной краевой задачи в силу теоремы Гильберта выражается через функцию Грина следующим образом:

$$y(x) = \int_0^1 \frac{\sin \pi |x - s|}{2\pi} \cos \pi s \, ds$$

или

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x \sin \pi(x - s) \cos \pi s \, ds + \frac{1}{2\pi} \int_x^1 \sin \pi(s - x) \cos \pi s \, ds =$$
$$= \frac{\sin \pi x}{2\pi} \int_0^x \cos^2 \pi s \, ds - \frac{\cos \pi x}{4\pi} \int_0^x \sin 2\pi s \, ds + \frac{\cos \pi x}{4\pi} \int_x^1 \sin 2\pi s \, ds -$$
$$-\frac{\sin \pi x}{2\pi} \int_x^1 \cos^2 \pi s \, ds = \frac{1}{4\pi}(2x - 1) \sin \pi x.$$

Пример 2.8. Свести к интегральному уравнению следующую краевую задачу

$$y'' + \lambda y = 2x + 1;$$
$$\begin{cases} y(0) = y'(1); \\ y'(0) = y(1). \end{cases}$$

Решение. Найдем функцию Грина краевой задачи

$$y''=0;$$

$$\begin{cases} y(0)=y'(1); \\ y'(0)=y(1). \end{cases}$$

Так как $y_1=1$ и $y_2=x$ – линейно независимые решения уравнения $y''=0$ и последняя однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то функция Грина этой краевой задачи существует и единственна и может быть найдена в виде

$$G(x,s)=\begin{cases} a_1+a_2x, & 0\le x\le s; \\ b_1+b_2x, & s\le x\le 1. \end{cases}$$

Из условия непрерывности, условия скачка производной функции Грина и граничных условий получаем для определения коэффициентов $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ систему

$$\begin{cases} a_1+a_2s-b_1-b_2s=0; \\ b_2-a_2=1; \\ a_1=b_2; \\ a_2=b_1+b_2. \end{cases}$$

Из этой системы находим $a_1=s-1,\ a_2=s-2,\ b_1=-1,$ $b_2=s-1.$ Следовательно, функция Грина имеет вид

$$G(x,s)=\begin{cases} (s-1)+(s-2)x, & 0\le x\le s; \\ -1+(s-1)x, & s\le x\le 1. \end{cases} \qquad (90)$$

Согласно теореме 18 заданная краевая задача эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x)+\lambda\int_0^1 G(x,s)y(s)\,ds=\int_0^1 G(x,s)(2s+1)\,ds,$$

или, вычисляя последний интеграл, получим, что заданная краевая задача эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x)+\lambda\int_0^1 G(x,s)y(s)\,ds=\frac{1}{6}\left(2x^3+3x^2-17x-5\right),$$

где $G(x,s)$ задается формулой (90).